

CIĄGI

5. Dla jakiej wartości x liczby: $2x + \frac{1}{2}$, $4x + 10$, $-3x - 12$ w podanej kolejności tworzą wyrazy ciągu arytmetycznego? Podaj te wyrazy oraz różnicę ciągu.

W zadaniach tego typu korzystamy z własności ciągu arytmetycznego:

TABLICE str. 3

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \text{ dla } n \geq 2$$

LEPIEJ PAMIĘTAĆ

Jeśli wyrazy a_1 , a_2 , a_3 są wyrazami ciągu arytmetycznego, to zachodzi:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$4x + 10 = \frac{2x + \frac{1}{2} + (-3x - 12)}{2} \quad / \cdot 2$$

$$8x + 20 = 2x + \frac{1}{2} - 3x - 12$$

$$8x + 20 = -x - 11 \frac{1}{2}$$

$$9x = -31 \frac{1}{2} \quad / : 9$$

$$x = -\frac{63}{2} \cdot \frac{1}{9}$$

$$x = -\frac{7}{2} = -3 \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 2x + \frac{1}{2} = 2 \cdot \left(-3 \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -6 \frac{1}{2}$$

$$a_2 = 4x + 10 = 4 \cdot \left(-3 \frac{1}{2}\right) + 10 = -4$$

$$a_3 = -3x - 12 = -3 \cdot \left(-3 \frac{1}{2}\right) - 12 = -1 \frac{1}{2}$$

Odp.: $x = -3 \frac{1}{2}$ $-6 \frac{1}{2}, -4, -1 \frac{1}{2}$ ciąg arytmetyczny rosnący o różnicy $r = 2 \frac{1}{2}$

6. Dla jakiej wartości x liczby: $4x + 23, x + 2, \frac{x}{2}$ w podanej kolejności tworzą wyrazy rosnącego ciągu geometrycznego? Podaj te wyrazy oraz iloraz ciągu.

W zadaniach tego typu korzystamy z własności ciągu geometrycznego:

TABLICE str. 3

LEPIEJ PAMIĘTAĆ

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

Jeśli wyrazy a_1, a_2, a_3 są wyrazami ciągu geometrycznego, to zachodzi:

$$a_2^2 = a_1 \cdot a_3$$

$$(x + 2)^2 = (4x + 23) \cdot \frac{x}{2}$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + \frac{23}{2}x \quad / \cdot 2$$

$$2x^2 + 8x + 8 = 4x^2 + 23x$$

$$-2x^2 - 15x + 8 = 0$$

$$a = -2 \quad b = -15 \quad c = 8$$

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 8 = 225 + 64 = 289 \quad \sqrt{\Delta} = 17$$

$$x_1 = \frac{-(-15) - 17}{2 \cdot (-2)} \quad x_2 = \frac{-(-15) + 17}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -8$$

$$a_1 = 4x + 23$$

$$a_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 23 = 25$$

$$a_1 = 4 \cdot (-8) + 23 = -9$$

$$a_2 = x + 2$$

$$a_2 = \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$$

$$a_2 = -8 + 2 = -6$$

$$a_3 = \frac{x}{2}$$

$$a_3 = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{-8}{2} = -4$$

$25, 2\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

$-9, -6, -4$

Ciąg geometryczny malejący o ilorazie

Ciąg geometryczny rosnący o ilorazie

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2\frac{1}{2}}{25} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{10}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}$$

Odp.: $x = -8$ $-9, -6, -4$

7. Trzy liczby, z których pierwszą jest 8, tworzą kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Jeśli drugą z nich podwoimy, a trzecią powiększymy o 14, to liczby te będą tworzyły kolejne wyrazy **niemonotonicznego** ciągu geometrycznego. Wyznacz te liczby.

8, x , y *ciąg arytmetyczny*

8, $2x$, $y + 14$ *ciąg geometryczny niemonotoniczny*

Tworzymy układ równań, wykorzystując własności: ciągu arytmetycznego oraz geometrycznego.

$$\begin{cases} x = \frac{8+y}{2} \\ (2x)^2 = 8 \cdot (y+14) \end{cases}$$

UWAGA!

Tu muszą być nawiasy

$$\begin{cases} x = \frac{8+y}{2} \\ 4x^2 = 8y + 112 \end{cases}$$

Można inaczej: wyznaczyć y i podstawić do drugiego równania

$$\begin{cases} x = \frac{8+y}{2} \\ 4 \left(\frac{8+y}{2}\right)^2 = 8y + 112 \end{cases}$$

$$4 \cdot \frac{64+16y+y^2}{4} = 8y + 112$$

$$64 + 16y + y^2 = 8y + 112$$

UWAGA!

Niewiadomą jest tu y

$$y^2 + 8y - 48 = 0$$

$$a = 1 \quad b = 8 \quad c = -48$$

$$\Delta = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48) = 64 + 192 = 256 \quad \sqrt{\Delta} = 16$$

$$y_1 = \frac{-8 - 16}{2 \cdot 1}$$

$$y_1 = -12$$

$$y_2 = \frac{-8 + 16}{2 \cdot 1}$$

$$y_2 = 4$$

$$x = \frac{8+y}{2}$$

$$x_1 = \frac{8+(-12)}{2}$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = \frac{8+4}{2}$$

$$x_2 = 6$$

8, -2, -12 *ciąg arytmetyczny* $r = -10$

8, 6, 4 *ciąg arytmetyczny* $r = -2$

8, -4, 2 *ciąg geometryczny* $q = -\frac{1}{2}$

niemonotoniczny

8, 12, 18 *ciąg geometryczny* $q = \frac{3}{2}$

rosnący

Odp. $x = -2, y = -12$

Dla sprawdzenia swoich umiejętności proponuję rozwiązać:

- a) Wyznacz x , tak aby wyrazy $-x - 7, 3x - 1, 9x - 5$ w podanej kolejności tworzyły wyrazy ciągu arytmetycznego. Podaj te wyrazy.

Odp. $x = 5$ $-12, 14, 40$

- b) Wyznacz x , tak aby wyrazy $x, 2x, x + 6$ w podanej kolejności tworzyły wyrazy ciągu geometrycznego. Podaj te wyrazy.

Odp. $x = 2$ $2, 4, 8$

Uwaga dla $x = 0$ $0, 0, 6$ to nie jest ciąg geometryczny

- c) Pomiedzy liczby -2 i 18 wstaw dwie takie liczby x i y , tak aby pierwsze trzy z nich tworzyły wyrazy ciągu arytmetycznego, a ostatnie trzy – wyrazy ciągu geometrycznego.

Odp. *I rozwiązanie* $x = \frac{1}{2}$ $y = 3$

II rozwiązanie $x = 2$ $y = 6$